

Grundlagen der Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1. Arithmetik.....	9
1.1. Zahlenmengen	9
1.2. Grundlegende Rechenregeln	11
1.3. Bruchrechnung.....	12
1.3.1. Multiplikation von Brüchen.....	12
1.3.2. Division von Brüchen	12
1.4. Addition und Subtraktion von Brüchen.....	13
1.5. Teilbarkeitsregeln	15
1.6. Terme	17
1.7. Potenzgesetze	20
1.8. Übungsaufgaben	22
1.9. Checkliste	25
2. Aussagenlogik.....	26
2.1. Mathematische Aussagen.....	26
2.2. Verbindungen von Aussagen.....	27
2.3. Die Wahrheitstabelle	28
2.4. Negation.....	29
2.5. Beweis durch Wahrheitstabelle	29
2.5.1. Regel von De Morgan	30
2.6. Wichtige Regeln	31
2.7. Vorrangregeln.....	32
2.8. Prädikate.....	33
2.9. Übungsaufgaben	34
2.10. Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3. Mengenlehre I	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.1. Definition.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.2. Aufzählende Schreibweise	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.3. Beschreibende Schreibweise	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.4. Intervall-Schreibweise.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.5. Weitere Regeln zur Aufzählung von Mengen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.

3.6.	Die Leere Menge	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.7.	Operationen von Mengen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.7.1.	Veranschaulichung durch Venn-Diagramme:	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.8.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.9.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.	Mengenlehre II	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.1.	Obermenge und Komplement	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.2.	Rechenregeln für Mengen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.3.	Teilmengen und Gleichheit von Mengen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.4.	Kartesisches Produkt	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.4.1.	Eigenschaften kartesischer Produkte	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.5.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.6.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.	Gleichungen & Ungleichungen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.1.	Lineare Gleichungen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.2.	Binomische Formeln	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.2.1.	Grafische Herleitung.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.3.	Quadratische Gleichungen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.4.	Ungleichungen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.5.	Beträge.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.7.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.8.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.	Summen & Produkte	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.1.	Mathematische Summen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.1.1.	Indeschreibweise	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.2.	Rechenregeln für Summen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.3.	Die Gaußsche Summenformel.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.4.	Geometrische Summe	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.4.1.	Anwendungsgebiete.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.5.	Produkte.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.6.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.7.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.

7.	Grundlagen der Analysis I	Fehler! Textmarke nicht definiert.
7.1.	Folgen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
7.2.	Grenzwerte.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
7.2.1.	Grenzwert-Ermittlung durch Rangordnung	Fehler! Textmarke nicht definiert.
7.2.2.	Grenzwert-Ermittlung durch Kürzung	Fehler! Textmarke nicht definiert.
7.3.	Reihen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
7.3.1.	Geometrische Reihe	Fehler! Textmarke nicht definiert.
7.5.	Euler'sche Zahl.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
7.6.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
7.7.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.	Grundlagen der Analysis II	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.1.	Funktionen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.2.	Lineare Funktionen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.2.1.	Rekonstruktion mit Punkt und Steigung	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.2.2.	Rekonstruktion mit zwei Punkten.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.3.	Quadratische Funktionen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.4.	Maximaler Definitionsbereich	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.5.	Exponentielle Gleichungen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.6.	Exponentielle Funktionen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.7.	Der natürliche Logarithmus.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.8.	Rechenregeln für e und \ln	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.8.1.	Definitionsbereiche	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.8.2.	Weitere Eigenschaften	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.9.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
8.10.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.	Grundlagen der Analysis III	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.1.	Ableitungen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.1.1.	Summenregel.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.1.2.	Faktorregel.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.1.3.	Produktregel	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.1.4.	Kettenregel	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.2.	Sonderfälle	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.2.1.	Extrem- und Wendepunkte	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.2.2.	Extremwertaufgaben.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.



9.3.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
9.4.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.	Lineare Algebra I	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.1.	Einsetzungsverfahren	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.2.	Gleichsetzungsverfahren	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.3.	Additionsverfahren	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.4.	Sonderfälle	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.4.1.	Keine Lösung	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.4.2.	Unendlich viele Lösungen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.5.	Gauß-Jordan-Algorithmus	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.6.	Onlinerechner zum Lösen von LGS	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.7.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
10.8.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.	Lineare Algebra II	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.1.	Matrix	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.2.	Matrixaddition	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.3.	Skalarmultiplikation	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.4.	Transponieren	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.5.	Matrixmultiplikation	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.6.	Einheitsmatrix	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.7.	Matrixinverse	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.7.1.	Inverse bestimmen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.7.2.	Existenz der Inversen prüfen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.8.	Determinante 3x3 bestimmen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.9.	Matrixdarstellung des LGS	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.10.	LGS mit Matrixinverse lösen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.11.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
11.12.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.	Primzahlen als Verschlüsselungsgrundlage	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.1.	Modulo	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.2.	Größter gemeinsamer Teiler	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.2.1.	Euklidischer Algorithmus	Fehler! Textmarke nicht definiert.

12.2.2.	Erweiterter Euklidischer Algorithmus.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.3.	Primzahlen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.4.	Primfaktorzerlegung.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.5.	Verschlüsselungen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.6.	Caesar-Verschlüsselung.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.7.	Algorithmus.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.8.	RSA-Verschlüsselung.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.9.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
12.10.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.	Grundbegriffe der Graphentheorie I.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.1.	Typen von Graphen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.1.1.	Ungerichteter Graph	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.1.2.	Gerichteter Graph	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.1.3.	Schlichter Graph und Multigraph	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.1.4.	Gewichteter Graph	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.1.5.	Darstellungen von Graphen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.1.6.	Adjazenzmatrix	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.1.7.	Adjazenzliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.1.9.	Inzidenzmatrix	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.2.	Knotengrad	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.3.	Isomorphe Graphen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.4.	Graphen online zeichnen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
13.5.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.	Grundbegriffe der Graphentheorie.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.1.	Vollständig	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.2.	Regulär	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.3.	Teilgraph	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.4.	Kantenzüge	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.5.	Eulerweg und Eulertour.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.6.	Zusammenhängend.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.7.	Erreichbarkeit.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.8.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
14.9.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.



15.	Baumstrukturen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.1.	Bäume und Wälder.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.2.	Breiten und Tiefensuche.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.3.	Minimale Spannbäume.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.4.	Prim-Algorithmus.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.5.	Binäre Bäume.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.6.	Binäre Suchbäume.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.6.1.	Struktur des Binärbaums.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.6.2.	Suchen von Elementen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.6.3.	Einfügen von Elementen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.6.4.	Löschen von Elementen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.7.	AVL-Bäume.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.8.	Übungsaufgaben.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
15.9.	Checkliste.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
16.	Matching.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
16.1.	Bipartite Graphen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
16.2.	Ungewichtetes Matching.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
16.3.	Matching mit augmentierenden Pfaden.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
16.4.	Gewichtetes Matching.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
16.5.	Kuhn-Munkres-Algorithmus / Ungarische Methode.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
16.6.	Übungsaufgaben.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
16.8.	Checkliste.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
17.	Wegealgorithmen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
17.1.	Dijkstra.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
17.1.1.	Dijkstra am Graphen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
17.2.	Dijkstra an der Adjazenzmatrix.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
17.3.	Floyd-Warshall Algorithmus.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
17.4.	Übungsaufgaben.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
17.5.	Checkliste.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
18.	Sortieralgorithmen und Komplexität.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
18.1.	Bubblesort.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
18.2.	Mergesort.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.



18.3.	Laufzeiten.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
18.4.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.
18.5.	Checkliste	Fehler! Textmarke nicht definiert.
19.	Weitere Inhalte.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
19.1.	Traveling Salesman Problem (TSP)	Fehler! Textmarke nicht definiert.
19.1.1.	Brute-Force-Algorithmus	Fehler! Textmarke nicht definiert.
19.2.1.	Nearest-neighbour-Algorithmus.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
19.3.	Christofides-Algorithmus.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
19.4.	Färbung	Fehler! Textmarke nicht definiert.
19.5.	Übungsaufgaben	Fehler! Textmarke nicht definiert.



1. Arithmetik

In diesem Kapitel lernst Du das grundlegende Rechnen mit Zahlen.

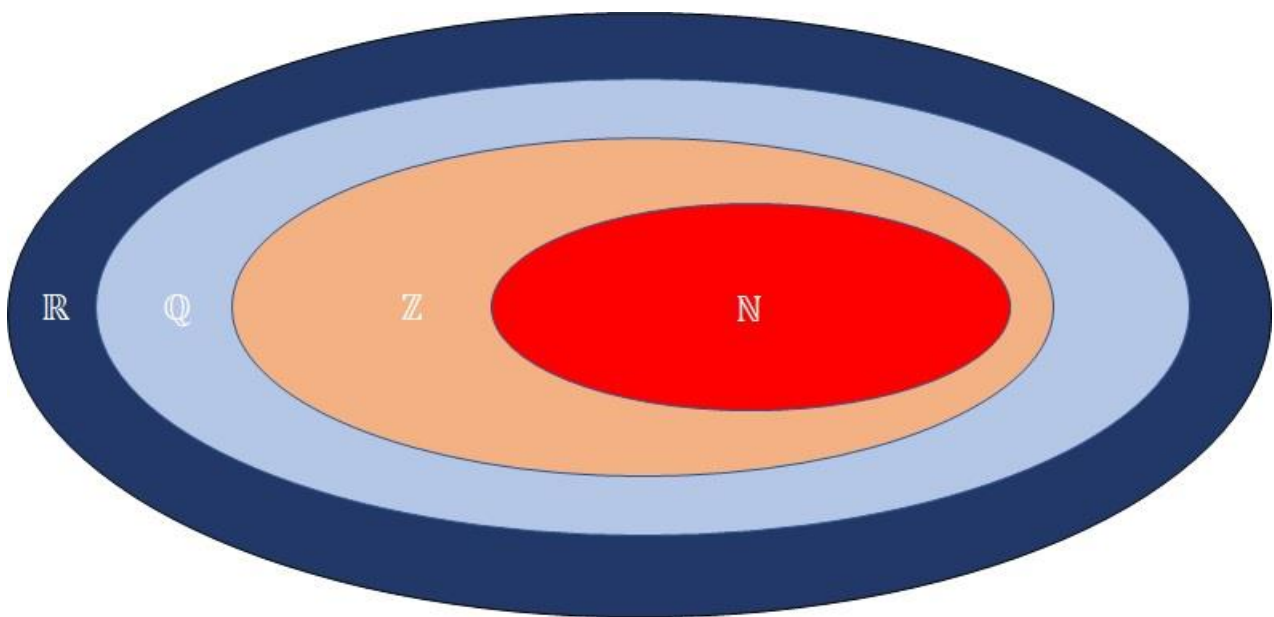
Nach Abschluss dieses Kapitels kannst Du...

- eine beliebige Zahl ihrem Zahlenbereich zuordnen
- mit Begriffen wie „Assoziativgesetz“, „Kommutativgesetz“ oder auch Distributivgesetz etwas anfangen
- die „Punkt vor Strich“-Rechnung sicher anwenden
- mit Brüchen rechnen
- Zahlen schnell mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln auf Teilbarkeit prüfen
- mit Potenzgesetzen rechnen



1.1. Zahlenmengen

Eine Zahlenmenge beinhaltet eine fest definierte Menge an Zahlen. Die folgende Grafik zeigt die elementaren Zahlenmengen detailliert in einer Übersicht. Die Menge der **natürlichen Zahlen** \mathbb{N} ist dabei vollständig in der Menge der **ganzen Zahlen** \mathbb{Z} enthalten. \mathbb{Z} ist in den **rationalen Zahlen** \mathbb{Q} enthalten und diese Menge bildet wiederum eine Teilmenge der **reellen Zahlen**. \mathbb{R}



Zahlenmenge	Symbol	=	Schreibweise
Natürliche Zahlen	\mathbb{N}	=	$\{1,2,3,4,5, \dots\}$
Ganze Zahlen	\mathbb{Z}	=	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
Rationale Zahlen	\mathbb{Q}	=	$\left\{\frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$
Reelle Zahlen	\mathbb{R}	=	$(-\infty, \infty)$

Das Element -1 gehört z.B. zur Menge \mathbb{Z} . Die mathematische Schreibweise dazu ist $-1 \in \mathbb{Z}$.



Wenn a ein Element der natürlichen Zahlen ist, dann ist a auch ein Element der ganzen Zahlen.

Wenn a ein Element der ganzen Zahlen ist, dann ist es auch ein Element der rationalen Zahlen und so weiter. Oder anders ausgedrückt: $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$

1. Aufgabe

Zu welchen Zahlenmengen gehören die folgenden Zahlen? Kreuze an.

	\mathbb{N}	\mathbb{Z}	\mathbb{Q}	\mathbb{R}
-5				
4,6				
$\sqrt{9}$				
$\sqrt{2}$				
$0,\bar{3}$				

2. Aufgabe

Kreuze jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

	AUSSAGE	1	0
a)	Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl		
b)	Jede ganze Zahl ist auch eine natürliche Zahl		
c)	Das Produkt aus zwei natürlichen Zahlen ist immer eine natürliche Zahl		
d)	Die Differenz aus zwei natürlichen Zahlen ist immer eine natürliche Zahl		
e)	Die Wurzel von einer natürlichen Zahl ist immer eine natürliche Zahl		
f)	Die Zahl Pi kann mit Hilfe eines Bruchs dargestellt werden		
g)	Die Menge der ganzen Zahlen ist in der Menge der reellen Zahlen enthalten		
h)	Eine Zahl mit unendlich Nachkommastellen kann nicht rational sein		
i)	Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es immer unendlich weitere reelle Zahlen		



1.2. Grundlegende Rechenregeln

Teil 1

Regel	Formel	Beispiel
Punkt vor Strich	$a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$	$2 + 3 \cdot 4 = 2 + (3 \cdot 4) = 2 + 12$
Potenz vor Punkt	$a^2 \cdot b = (a \cdot a) \cdot b$	$2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3$
Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$
	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$2 + 3 = 3 + 2$
	$a \cdot b = b \cdot a$	$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$
Distributivgesetz	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	$(2 + 3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$
	$(a + b) : c = a : c + b : c$	$(2 + 3) : 4 = 2 : 4 + 3 : 4$
Division durch Null	$a : 0 = \text{Error!}$	$2 : 0 = \text{Error!}$



Teil 2

Regel	Formel	Beispiel
Minus vor Klammer	$-(a + b - c) = -a - b + c$	$-(3 + 4 - 2) = -3 - 4 + 2$
Positives Produkt	$(+) \cdot (+) = (+)$	$8 \cdot 9 = 72$
	$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-8) \cdot (-9) = 72$
Negatives Produkt	$(+) \cdot (-) = (-)$	$8 \cdot (-9) = -72$
	$(-) \cdot (+) = (-)$	$(-9) \cdot 8 = -72$
Neutrales Element der Addition	$a + 0 = a$	$9 + 0 = 9$
Neutrales Element der Multiplikation	$a \cdot 1 = a$	$9 \cdot 1 = 9$

! Die Regel für ein positives/ negatives Produkt lässt sich auf die Division übertragen. Zwei gleiche/ ungleiche Vorzeichen ergeben einen positiven/ negativen Quotientenwert.



3. Aufgabe

Berechne vorteilhaft.

a) $12 + 7 + 8 + 3$

b) $4 \cdot (1,3 - 5,3) \cdot 1$

c) $(36 - 6) : (-30)$

d) $4 \cdot 7 + 9 \cdot 7 - 3 \cdot 7$

e) $-(120 - 24) : (-12)$

f) $3 \cdot 4,1 + 3 \cdot 5,9$

4. Aufgabe

Berechne vorteilhaft.

a) $-(2,2 - 3,7) \cdot \frac{4}{2}$

b) $-(5 - 3 \cdot 3 - 5) : 3$

c) $2 : 10 + 18 : 10$

d) $-\left(3 - \frac{9}{3}\right) \cdot 14$

e) $3 \cdot 0,75 + 7 \cdot 0,75$

f) $-(1 - 3) + (4 - 6)$

5. Aufgabe

Berechne vorteilhaft.

a) $-(2 + 4 + 6) + (2 + 4 + 6)$

b) $-2 \cdot (-5)^2 \cdot (-1)$

c) $3 \cdot 4,2 + 3 \cdot 5,8$

d) $(-1)^{31} \cdot (-4)^2$

e) $6 \cdot \left(\frac{5}{6} + 2 + \frac{21}{6} + 4\right)$

f) $1 \cdot (2 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) + 3) \cdot 1$

1.3. Bruchrechnung



1.3.1. Multiplikation von Brüchen

Zwei Brüche werden multipliziert, indem jeweils die Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden.

Regel	Formel	Beispiel
Bruch * Bruch	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$



1.3.2. Division von Brüchen

Zwei Brüche werden dividiert, indem vom „rechten“ Bruch der Kehrwert gebildet und anschließend multipliziert wird.

Regel	Formel	Beispiel
Bruch : Bruch	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$



6. Aufgabe

Multipliziere die Brüche und vereinfache, wenn möglich.

a) $\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3}$

d) $\frac{11}{4} \cdot \frac{64}{44}$

b) $\frac{9}{5} \cdot \frac{8}{7}$

e) $7 \cdot \frac{3}{14}$

c) $\frac{8}{15} \cdot \frac{30}{4}$

f) $0,5 \cdot \frac{8}{3}$

7. Aufgabe

Dividiere die Brüche und vereinfache, wenn möglich.

a) $\frac{6}{5} : \frac{3}{5}$

d) $\frac{6}{5} : 12$

b) $\frac{8}{45} : \frac{4}{15}$

e) $\frac{7}{18} : \frac{28}{27}$

c) $0,5 : \frac{1}{8}$

f) $\frac{11}{11} : \frac{5}{5}$



1.4. Addition und Subtraktion von Brüchen

Um Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, müssen diese zunächst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden (falls erforderlich). Anschließend werden nur die Zähler addiert/subtrahiert. Der gemeinsame Nenner bleibt unverändert.

Regel	Formel	Beispiel
Bruch + Bruch	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
Bruch - Bruch	$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Um einen gemeinsamen Nenner zu finden, können die Nenner der beiden Brüche multipliziert werden.

8. Aufgabe

Addiere oder subtrahiere die Brüche und vereinfache, wenn möglich.

a) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}$

d) $\frac{6}{5} + 12$

b) $\frac{27}{45} - \frac{4}{15}$

e) $\frac{7}{18} + \frac{28}{45}$

c) $\frac{11}{11} - \frac{5}{5}$

f) $0,5 - \frac{1}{5}$



9. Aufgabe

Wandle um in eine Dezimalzahl.

a) $\frac{14}{5}$

d) $\frac{125}{5}$

b) $\frac{15}{4}$

e) $\frac{8,5}{50}$

c) $\frac{21}{25}$

f) $\frac{31}{20}$

! Wandle zunächst die Brüche auf den Nenner 10 oder 100 um. Z.B. $\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = 0,24$

10. Aufgabe

Wandle um in einen Bruch und vereinfache, wenn möglich.

a) 0,6

d) 1,45

b) 0,5

e) 1,03

c) 0,01

f) 2,3

! Wandle zunächst um auf den Nenner 10 oder 100 und kürze anschließend, wenn möglich Z.B. $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$



11. Aufgabe

Berechne folgende Ausdrücke und vereinfache so weit wie möglich. Gib das Ergebnis als Bruch oder Dezimalzahl an.

a) $\frac{27}{30} - \frac{3}{30}$

f) $\frac{6}{5} + \frac{3}{15}$

b) $\frac{8}{5} + 9$

g) $\frac{18}{24} : 3$

c) $0,625 - \frac{3}{8}$

h) $4 : \frac{28}{7}$

d) $\frac{8}{15} \cdot \frac{30}{4}$

i) $\frac{8}{39} : \frac{64}{13}$

e) $1,2 \cdot \frac{10}{3}$

j) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

12. Aufgabe

Berechne die folgenden Terme.

a) $-\frac{9}{2} - \frac{90}{40} - 3\frac{6}{8}$

c) $6 + 5 \cdot \frac{5}{30} + \frac{5}{30}$

b) $5\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : \left(\frac{15}{4} - 3\frac{1}{2}\right)$

d) $\frac{6a}{3} + 6a - (3^2a - a)$

! Wandle die unechten Brüche in echte Brüche um Z.B. $3\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$



1.5. Teilbarkeitsregeln

Nachfolgend findest du eine Auflistung der Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2 bis 10. Die zentrale Frage in der Teilbarkeitslehre ist stets dieselbe und lautet: „Ist die Zahl x durch die Zahl y ohne Rest teilbar?“. Um solche Fragen zu beantworten, gibt es Regeln, die die Entscheidung über die Teilbarkeit erleichtern.

Teilbar durch...	wenn...	Beispiel
2	...die letzte Ziffer eine 0,2,4,6 oder 8 ist.	2 28 Da die letzte Ziffer von 28 eine 8 ist.
3	...die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist.	3 324 Da die Quersumme von 324, also $3 + 2 + 4 = 9$, durch 3 teilbar ist.
4	...die Zahl, die sich aus den letzten beiden Stellen ergibt, durch 4 teilbar ist.	4 944 Da die letzten beiden Stellen 44 sind und diese Zahl durch 4 teilbar ist.
5	...die letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist.	5 970 Da die letzte Ziffer eine 0 ist.
6	...die Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist.	6 282 Da die Zahl 282 sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist.
7	Die alternierende 3er Quersumme durch 7 teilbar ist.	7 627.725 Da $725 - 627 = 98$ und $98 = 70 + 28$ durch 7 teilbar ist.
8	...die Zahl, die sich aus den letzten drei Stellen ergibt, durch 8 teilbar ist.	8 11.864 Da die letzten drei Stellen 864 sind und diese Zahl durch 8 teilbar ist.
9	...die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist.	9 801 Da die Quersumme von 801, also $8 + 0 + 1 = 9$, durch 9 teilbar ist.
10	...die letzte Ziffer eine 0 ist	10 40.210 Da die letzte Ziffer eine 0 ist.

! $a|b$ übersetzt: a teilt b

! $a \nmid b$ übersetzt: a teilt b nicht





13. Aufgabe

Kreuze jeweils an, wenn die Zahl teilbar ist.

	Zahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)	2520									
b)	199									
c)	5040									
d)	1276									
e)	1451									
f)	396									
g)	1709									
h)	3418									
i)	5678									

14. Aufgabe

Setze für die leeren Stellen die passenden Ziffern ein und achte dabei auf die nebenstehenden Bedingungen.

- a) 382_ kleinstmögliche Zahl teilbar durch 2
- b) 874__ größtmögliche Zahl teilbar durch 2
- c) 7535_ kleinstmögliche Zahl teilbar durch 3
- d) 68__0 kleinstmögliche Zahl teilbar durch 8
- e) 11__0 kleinstmögliche Zahl teilbar durch 6
- f) 1_1_ durch 3, nicht aber durch 6 teilbar





1.6. Terme

Um Rechnungen übersichtlicher darzustellen, werden Terme (mathematische Gebilde aus Zahlen und Variablen) auf unterschiedliche Art und Weise vereinfacht.

	Zu vereinfachender Term	Ausführliche Darstellung	Vereinfachung
Addition und Subtraktion	$3x + 2x + x$	$= (x + x + x) + (x + x) + x$	$= 6x$
Multiplikation	$3x \cdot 2x \cdot x$	$= (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (x \cdot x \cdot x)$	$= 6x^3$
Division	$\frac{15x^4}{12x^3}$	$= \frac{15}{12} \cdot \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x}$	$= \frac{5}{4}x$

! $6x = 6 \cdot x$

! $x = 1 \cdot x$

Beispiel

$$\begin{aligned}
 & 3x^2 + \frac{3x^2y^3}{y} + 6 \cdot x \cdot x - x^2y^2 \\
 &= 3x^2 + \frac{3x^2y^2}{1} + 6x^2 - x^2y^2 \\
 &= 3x^2 + 6x^2 + 3x^2y^2 - x^2y^2 \\
 &= 9x^2 + 3x^2y^2 - 1x^2y^2 \\
 &= 9x^2 + 2x^2y^2 \\
 &= x^2 \cdot (9 + 2y^2)
 \end{aligned}$$

Alternatives Ergebnis durch Ausklammerung von x^2 .

! Nur gleichartige Ausdrücke zusammenfassen. x^2 gehört zu einer Art. x^2y^2 gehört zu einer anderen Art





15. Aufgabe

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

- a) $2a + (4b - 4c) - 2 \cdot (3a + 3c - b)$ c) $2ab - (a^3 - 4ab) - (4b^2 - a^3 + 1)$
 b) $2a^2 + a - (a + 5) - (-3 + a^2)$ d) $3x^2 + 2y^2 - (x^2 - y^2) - (-5xy)$

16. Aufgabe

Vereinfache die folgenden Terme.

- a) $6a + (4b - 2c) - 2 \cdot (2a + 3c - b)$
 b) $3a - 8b + (11a + 4) - (5b - a + 3)$
 c) $2a^2 + 3a - (a + 5) - (1 - 3a^2)$
 d) $3x^2 + y^2 - (x^2 - xy - y^2) + (5y^2 - 5xy)$
 e) $3ab + 6 + (a^2 - 2ab - 5) - (4b^2 - a^2 + 1)$

17. Aufgabe

Vereinfache die folgenden Terme.

- a) $-\frac{6ba}{a} + \frac{2a^3 \cdot 4b}{8a^2b} + 7b - 2a$ c) $(a^2b^3c^{-1})^2 \cdot (c^2)^2$
 b) $-3 + x \cdot x \cdot \left(\frac{3}{x^2} - 4\right) + 4x^2$ d) $4x \cdot 4x \cdot 4x + \frac{5y^2 - 5xy}{y-x} - 15y - \frac{128x^5}{2x^2}$



18. Aufgabe

Stelle eine Gleichung auf und bestimme anschließend die Lösungsmenge

- a) Die Summe dreier fortlaufender Zahlen beträgt 12.
 b) Die Summe dreier aufeinander folgender Zahlen ist gleich dem Vierfachen der größten der drei Zahlen vermindert um 11.
 c) Jakob ist dreimal so alt wie Daniel. In vier Jahren sind sie zusammen 16 Jahre alt. Wie alt sind Jakob und Daniel heute?
 d) Die Länge eines Rechtecks entspricht der dreifachen Breite vermindert um fünf Zentimeter. Der Umfang des Rechtecks beträgt 22cm. Berechne Länge und Breite des Rechtecks.



19. Aufgabe



Vereinfache folgende Terme so weit wie möglich.

a) $x^3 \cdot x^4$

d) $(x^2)^3$

g) $\frac{x^2 \cdot y^{-4} \cdot z^3}{x^{-1} \cdot y^3 \cdot z^2}$

b) $x^3 \cdot y^3$

e) $\sqrt[4]{x\sqrt{y}}$

h) $\sqrt[3]{x^{2a} \cdot y^{9a} \cdot \sqrt[6]{x^{24a}}}$

c) $x^2 \cdot x^{-3}$

f) $(\sqrt{x^3})^2$

20. Aufgabe



Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $-\left(-\frac{6ba}{a}\right) + \frac{2a^3 \cdot 4b^2}{8a^3b} + 7b$

b) $2x \cdot 2x + \frac{5y^2 - 5x^2}{y-x} - 5y - \frac{8x^5}{2x^3}$





1.7. Potenzgesetze

In Potenzen wird ausgedrückt, dass eine Zahl mehrere Male mit sich selbst multipliziert wird. Dies kann auf unterschiedliche Arten durchgeführt werden. Ein Ausdruck der Form $a \cdot x^n$ wird Potenz genannt. Diese Potenz besteht aus dem **Koeffizienten** a , der **Basis** x und dem **Exponenten** n .

Nachfolgend erhältst du eine Übersicht der wichtigsten Potenzgesetze.

Regel	Formel	Beispiel	Anmerkung
Gleiche Basis	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$	Exponenten werden addiert.
Gleicher Exponent	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$	Basen werden multipliziert.
Potenzieren	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$	Exponenten werden multipliziert.
Radizieren	$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[3]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4$	$\frac{\text{Exponent}}{\text{Wurzelexponent}}$
Negativer Exponent	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$	Exponent im Nenner-Ausdruck wird negativ. Dafür entfällt der Bruch.
Exponent Null	$x^0 = 1$	$8^0 = 1$	Gilt für $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Beispiel

$$\left(\frac{2^{x+1}}{2^x \cdot 2} \right)^{1000}$$

$$= \left(\frac{2^x \cdot 2^1}{2^x \cdot 2} \right)^{1000}$$

$$= 1^{1000}$$

$$= 1$$

Gesetz der gleichen Basis

Da im Zähler und Nenner dasselbe steht ist der Wert des Bruchs 1

Es gilt: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$

21. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke zu vereinfachen

a) $\frac{1}{x^{-3}}$

d) $\frac{a^{-2}}{a^3}$

b) $4^2 \cdot 4^9 \cdot 4^{-11}$

e) $\frac{x^{-4}}{x^3}$

c) $x^{-1}y^3xy^{-1}$



22. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke zu vereinfachen.

a) $4^2 : 2^3 - 9 \cdot 3^{-2}$

c) $\left(\frac{x^4}{x^3}\right)^2$

b) $\frac{a^{-4}b^2}{a^3b^2}$

23. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke zu vereinfachen.

a) $\frac{18a^9b^7}{35x^3y^2} : \frac{12a^5b^3}{21x^4y^6}$

d) $\left(\frac{\sqrt{y^{-5}x^0 \cdot y^3}}{x \cdot \sqrt[6]{y^3}}\right)^2$

b) $\frac{(2^{x+y})^2}{2^{2y}}$

e) $\sqrt[4]{a^6 \cdot b^{-4} \cdot \sqrt{a^4} \cdot (b^4)^4}$

c) $\frac{a^{n+1} \cdot b^{n-1}}{a^n b^n}$



24. Aufgabe (Klausur Generation 1)

Ordne die folgenden Terme richtig zu.

*Hinweis: falsche Antworten geben **keinen Minuspunkt**.*

a)	$\frac{x^5}{x^2}$			$\frac{5}{x^2}$
b)	$\left(\frac{1}{x^1}\right)^{-2}$			$(x^5 \cdot x^1)^{\frac{1}{3}}$
c)	$x^5 \cdot x$			$\left(\left(\frac{1}{x^{-4}}\right)^{-1}\right)^{-1}$
d)	$\sqrt[4]{x^{10}}$			$\frac{x^{-3}}{x^{-9}}$
e)	x^4			$\left(\left(\left(\frac{1}{x^{-4}}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$
f)	x^{-4}			$\frac{1}{x^{-3}}$



1.8. Übungsaufgaben

25. Aufgabe

Füge das richtige Symbol $>$, $<$ oder $=$ ein.

5^0		$\sqrt{5}$
$\sqrt{\frac{1}{4}}$		0,5
-4		-8
$(-1)^{100}$		$(-1)^{99}$
$\sqrt[3]{2^4}$		$\sqrt[4]{2^3}$
$1 - 3 + 5 - 7$		$-\sqrt[3]{8} \cdot 2$
$5^{\frac{1}{3}}$		$\sqrt[3]{5}$

26. Aufgabe

Kreuze jeweils an welche der Zahlen von 2 bis 10 die folgenden Zahlen in der Tabelle teilen.

Zahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10
550									
234									
957									
134									
112.719									
31.031									
714									
585									

27. Aufgabe

Berechne die Brüche und vereinfache, wenn möglich.

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}$

d) $\frac{11}{4} - \frac{64}{44}$

b) $\frac{1}{6} : \frac{1}{12}$

e) $3\frac{1}{3} : 5$

c) $\frac{1}{6} : \frac{1}{12}$

f) $\frac{1}{2}a - \frac{a}{4} + \frac{6a}{8}$

28. Aufgabe

Wandle um in eine Dezimalzahl.

a) $\frac{13}{4}$

d) $\frac{65}{13}$

b) $\frac{17}{3}$

e) $\frac{3}{4} + \frac{7}{8}$

c) $\frac{60}{12}$

f) $\frac{10}{15} + \frac{8}{10}$

29. Aufgabe

Wandle um in einen Bruch und vereinfache, wenn möglich.

- a) 0,87
- b) 0,35
- c) 0,02
- d) 1,21
- e) 12,42
- f) 3,3

30. Aufgabe

Berechne die mathematischen Terme.

- a) $-\frac{2}{3} - \frac{50}{30} - 2\frac{8}{6}$
- b) $2\frac{3}{2} + \frac{4}{7} : \left(\frac{2}{7} - 2\frac{3}{2}\right)$
- c) $2 + 4 \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{15}$
- d) $\frac{2a}{5} + 2a - (4^2a - a)$

! Wandle die gemischten Brüche in unechte Brüche um. Z.B. $3\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$

31. Aufgabe

Berechne vorteilhaft.

- a) $-4 \cdot (-2)^{-2} \cdot (-\pi)$
- b) $7 \cdot 2,2 + 7 \cdot 7,8$
- c) $(-2)^6 \cdot (-4)^{-2}$
- d) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-2)$
- e) $-\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$
- f) $0 \cdot \left(\frac{\frac{24}{23} + 1}{\frac{22}{21} - 1}\right)$

32. Aufgabe

Vereinfache die folgenden Terme.

- a) $3b + 5b - 5c - (3a - 10b + a - 7b)$
- b) $-7b + 7a - 2b + 9a - (3b - 2b - 3c)$
- c) $7x^2 - [x - x(3x + 1)]$
- d) $2 \cdot 4x \cdot 3y + 5x \cdot 2y - 18xy$

33. Aufgabe

Forme in ein Produkt um. Klammere dazu möglichst viel aus

- a) $8xy + 4y$
- b) $9x^2 - 45x$
- c) $26xyz + 13zy - 39xy$
- d) $7x^2 - 7y^2 + 7z^3$
- e) $-(3xy - 24x^2y) + 6x$

34. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

- a) $\frac{1}{x^{-2}}$
- b) $3^2 \cdot 3^{10} \cdot 3^{-11}$
- c) $\frac{a^{-4}}{a^2}$
- d) $x^2y^3xy^{-3}$
- e) $\frac{a^{-1}b^2}{a^3b^{-1}}$
- f) $((a^2)^2)^2$





35. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $\left(\frac{x^4}{x}\right)^2$

c) $\frac{x^5 y^4}{x^{-4} y^3}$

b) $\frac{3^{x+5}}{3^{x-2}}$

d) $\frac{(2^x)^2}{2^{2x}}$

36. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke wo weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $8^2 : 4^3 - 8 \cdot 4^{-2}$

d) $\left(\frac{2^{x+1}}{2^x \cdot 2}\right)^{1000}$

b) $\frac{a^4 b^{-2}}{a^3 b^{-2}}$

e) $\frac{x^{-4} y^{-3}}{x^4 y^{-2}} \cdot y \cdot x^8$

c) $\sqrt{\left(\frac{x^8}{x^5}\right)^2}$



37. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $\frac{a^{n+2} \cdot b^{n-2}}{a^n b}$

c) $\left(y^3 x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{y^3}\right)^2$

b) $\frac{12a^9 b^7}{35x^3 y^2} : \frac{12a^5 b^3}{7x^4 y^6}$

d) $\frac{24a^4 b^4}{105x^3 y^3} : \frac{6a^7 b^3}{15x^4 y^2}$

38. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $\frac{6x \cdot y^2}{3y^3 x} : \frac{(x^5)^2}{y}$

d) $\frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{b^{n-1}}{b^n}$

b) $\frac{\left((\sqrt{8})^y\right)^2}{2^{2y}}$

e) $\sqrt[3]{a^{1,5} \cdot b^{-3} \cdot \sqrt{a^3} \cdot (b^4)^0}$

c) $\left(\frac{\sqrt{y^{-5} x^0 \cdot y^3}}{\sqrt[6]{y^{12}}}\right)^{\frac{1}{3}}$





39. Aufgabe

Kreuze jeweils wahr oder falsch an.

	Aussage	1	0
a)	Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen befinden sich unendlich weitere reelle Zahlen		
b)	Die Zahl $\sqrt{2}$ kann auch als Bruch dargestellt werden		
c)	$\pi \notin \mathbb{Q}$		
d)	$\sqrt{-9} \in \mathbb{R}$		
e)	Die Anzahl der Elemente der Menge der natürlichen Zahlen ist 42		
f)	Die Anzahl der Elemente der Menge der reellen Zahlen ist endlich		
g)	1 ist eine ganze Zahl, aber keine Primzahl		
h)	$\forall n \in \mathbb{N}: 2^n > n^2$		
i)	$\pi < \sqrt{3}$		

1.9. Checkliste

- Ich weiß, welche Zahlenmengen es gibt
- Ich kenne das Assoziativgesetz
- Ich kenne das Kommutativgesetz
- Ich weiß, was das Distributivgesetz ist
- Ich beherrsche die „Punkt vor Strich“-Rechnung
- Ich weiß, wie Brüche addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden
- Ich kenne die Teilbarkeitsregeln
- Ich kann mit einem Minus vor einer Klammer umgehen
- Ich kenne die Potenzgesetze



2. Aussagenlogik



Das Ziel dieses Kapitels ist, dass du die Grundlagen der Aussagenlogik verstanden hast. Nach Abschluss des Kapitels kannst du...

- Entscheiden, ob es sich im mathematischen Sinne um eine Aussage handelt
- Aussagen verneinen.
- mithilfe von Wahrheitstabellen überprüfen, ob Aussagen logisch gleichwertig sind.
- ein verbales Sprachgebilde in eine mathematische Aussageform umwandeln.
- mithilfe von Regeln mathematische Aussageformen vereinfachen.

2.1. Mathematische Aussagen

Eine mathematische Aussage ist eine Aussage, die nur Wahr (1) oder Falsch (0) sein kann. Aussagen werden immer mit Großbuchstaben bezeichnet.

Beispiel

Für mathematische Aussagen:

- A : $3 < 5$ Wahr
- B : „Die Leinwand ist grün.“ Falsch
- C : „Das Smartboard ist quadratisch.“ Falsch
- D : „VW ist eine Aktiengesellschaft.“ Wahr

Für nicht mathematische Aussagen:

- A : „Hoffentlich gewinne ich im Lotto.“
- B : „Hoch lebe die Regierung.“
- C : „Der Kaffee schmeckt gut.“
- D : „Gauß ist der beste Mathematiker.“



40. Aufgabe

Welche der folgenden Sätze sind mathematische Aussagen?

- a) Prost!
- b) Morgen ist Sonntag
- c) Das Auto ist drei Jahre alt
- d) Es gibt keine gerade Primzahl
- e) Mach doch bitte die Tür hinter dir zu
- f) Das Regal wiegt 80kg
- g) Es gibt eine gerade Primzahl
- h) Es gibt gerade Primzahlen

41. Aufgabe

Welche der folgenden mathematischen Aussagen sind wahr?

- a) Paris ist eine Hauptstadt
- b) Alle Primzahlen sind gerade
- c) 1970 ist eine ganze Zahl
- d) $\sqrt{7} = 3$
- e) $6 \leq 7 \leq 5$



2.2. Verbindungen von Aussagen

Zwei oder mehrere Aussagen können miteinander verbunden werden. Die folgende Tabelle zeigt die wichtigsten dieser Aussageverbindungen.

Negation	$\neg A := \bar{A}$	Sprich: "Nicht" oder "kein"
Konjunktion	$A \wedge B$	Sprich: "und"
Disjunktion	$A \vee B$	Sprich: "oder"
Implikation	$A \rightarrow B$	Sprich: "Wenn..., dann..."
Äquivalenz	$A \leftrightarrow B$	Sprich: "Genau wenn..., dann..."
Exklusiv oder	$A \oplus B$	Sprich: "entweder... oder..."



42. Aufgabe

Es seien die Aussagen A bis D gegeben.

- A: Anton geht auf die Kirmes.
- B: Anton trinkt ein Bier.
- C: Anton isst einen Crêpe.
- D: Anton trifft seinen Kumpel Dennis.

Beschreibe verbal:

- $A \rightarrow C$
- $A \wedge C$
- $A \rightarrow B$
- $(A \wedge D) \rightarrow B$

43. Aufgabe

Verneine die folgenden Sätze

- Mein Hund heißt Charly
- Pi ist eine rationale Zahl
- Alle Polos sind Dieselfahrzeuge
- Es gibt Autos mit mehr als 600PS
- Kein Student liest Zeitung



2.3. Die Wahrheitstabelle

Für zwei Aussagen A, B gilt bei Verbindung folgende Wahrheitstabelle.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0



2.4. Negation

Eine Aussage A nimmt den umgekehrten Wahrheitswert an, wenn diese negiert wird.

Sprich: Nicht A

A	$\neg A$
1	0
0	1

! Anstelle des Negationszeichen \neg kann auch der zu negierende Bereich mit einer „Overline“ markiert werden

! $\neg A = \bar{A}$



2.5. Beweis durch Wahrheitstabelle

Mit Hilfe von Wahrheitstabellen kann man z.B. nachweisen, dass zwei Aussageformen logisch gleichwertig sind. In dem Fall darf ein "=" zwischen den Aussageformen gesetzt werden.

Beispiel

Es kann gezeigt werden, dass die Aussage: "Es ist nicht wahr, dass ich in Wolfsburg wohne und bei VW arbeite."

und die Aussage: "Ich wohne nicht in Wolfsburg oder ich arbeite nicht bei VW."

logisch gleichwertig sind. In der Wahrheitstabelle kann das folgendermaßen aussehen:

Es wird definiert: A: Ich wohne in Wolfsburg B: Ich arbeite bei VW

Daraus folgt:

"Es ist nicht wahr, dass ich in Wolfsburg wohne und bei VW arbeite." entspricht $\overline{A \wedge B}$

Und

"Ich wohne nicht in Wolfsburg oder ich arbeite nicht bei VW." entspricht $\bar{A} \vee \bar{B}$

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \vee \bar{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Da die Spalten übereinstimmen, sind die beiden Aussagen logisch gleichwertig. Es kann notiert

werden: $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$





2.5.1. Regel von De Morgan

Die De Morganschen Regeln sind wichtige Bestandteile der Aussagenlogik. Mit Hilfe dieser Regeln lassen sich Und-Verneinungen in Oder-Verneinungen umformen (und umgekehrt).

De Morgansche Regeln:

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Beispiel

„Es ist nicht wahr, dass das Bier warm oder alkoholfrei ist.“

Umgewandelt nach der De Morganschen Regel:

"Das Bier ist weder warm noch alkoholfrei."

44. Aufgabe

Zeige mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass folgende Aussageformen logisch gleichwertig sind.

- a) $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$
- b) $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$
- c) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- d) $\overline{A \wedge B \wedge C} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}$
- e) $A \wedge \bar{B} = \overline{A \rightarrow B}$
- f) $\overline{\bar{A} \vee B} = A \wedge \bar{B}$

45. Aufgabe (Klausur Generation 1)

Untersuche mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, ob folgende Aussagen logisch gleichwertig sind.

- a) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = \overline{A \oplus B}$
- b) $(A \rightarrow B) = (\neg B \rightarrow \neg A)$
- c) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- d) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$



2.6. Wichtige Regeln

Teil 1

$A \vee \bar{A}$	=	1	Satz vom ausgeschlossenen
$A \wedge \bar{A}$	=	0	Dritten
$A \vee 1$	=	1	Absorption
$A \wedge 0$	=	0	
$A \vee 0$	=	A	Neutrales Element
$A \wedge 1$	=	A	
$A \rightarrow B$	=	$\bar{A} \vee B$	Regeln zur Implikation
$\overline{A \rightarrow B}$	=	$A \wedge \bar{B}$	

Teil 2

Konjunktion		Disjunktion	
$A \wedge B$	=	$B \wedge A$	$A \vee B$ = $B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	=	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$ = $(A \vee B) \vee C$
$A \wedge (B \vee C)$	=	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$ = $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

46. Aufgabe

Negiere die Aussageformen und beschreibe die dazugehörigen Verneinungen verbal

- $A \rightarrow C$
- $A \wedge C$
- $A \rightarrow B$
- $(A \wedge D) \rightarrow B$

A: Anton geht auf die Kirmes.

B: Anton trinkt ein Bier.

C: Anton isst einen Crêpe.

D: Anton trifft seinen Kumpel Dennis.

47. Aufgabe

Schreibe die Ausdrücke als negierte Implikation.

- $(A \wedge B) \wedge (\neg C)$
- $(A \vee C) \wedge (\neg B \vee (\neg C))$



48. Aufgabe

Gegeben sei die logische Formel $\alpha := \neg(\neg A \wedge B \rightarrow C \vee B)$

- Forme α so um, dass kein Implikationspfeil mehr vorkommt und kein geklammerter Ausdruck negiert ist.
- Was lässt sich über den Wahrheitswert von α sagen?

49. Aufgabe

Zeige mithilfe einer Wahrheitstafel, dass folgende Aussage stets wahr ist.

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$$

2.7. Vorrangregeln

Analog zur *Punkt vor Strich Rechnung* gibt es auch in der Aussagenlogik eine ähnliche Vorrangregel.

Diese Regeln sind nützlich, um Klammern zu sparen.

1)	zuerst	\neg
2)	dann	\wedge, \vee
3)	zuletzt	$\rightarrow, \leftrightarrow$

50. Aufgabe

Vereinfache den Ausdruck unter Beachtung der Vorrangregeln.

$$(\neg A) \rightarrow (((\neg B) \vee C) \wedge (\neg(D \vee E)))$$





2.8. Prädikate

Die Prädikatenlogik ist eine Erweiterung der Aussagenlogik. Ein Prädikat $a(x)$ ist eine Funktion, die einem Individuum x eine Aussage zuordnet.

Beispiel

x bezeichne einen Wolfsburger, $a(x) := x$ arbeitet bei VW, $b(x) := x$ fährt einen Golf

$\exists x: a(x)$	Sprich: Es gibt ein x für das gilt $a(x)$	Es gibt Wolfsburger, die bei VW arbeiten
$\forall x: a(x)$	Sprich: für alle x gilt $a(x)$	Alle Wolfsburger arbeiten bei VW
$\exists x: a(x) \wedge b(x)$	Sprich: Es gibt x für das gilt $a(x)$ und $b(x)$	Es gibt Wolfsburger, die bei VW arbeiten und einen Golf fahren

Die folgende Tabelle zeigt, wie Prädikate verneint werden.

$\overline{(\exists x: P(x))}$	=	$\forall x: \neg P(x)$
$\overline{(\forall x: P(x))}$	=	$\exists x: \neg P(x)$

51. Aufgabe

Schreibe folgende umgangssprachliche Formulierungen unter Verwendung geeigneter Bezeichnungen als (prädikaten-)logische Ausdrücke.

- A: Jeder Wolfsburger hat ein Lieblingsrestaurant
- B: Jeder Wolfsburger hat ein Lieblingsrestaurant oder eine Lieblingsbar
- C: Es gibt Wolfsburger, die ein Lieblingsrestaurant, aber keine Lieblingsbar haben.
- Gib logische Ausdrücke für die Negation von A, B und C an.
- Interpretiere die Ergebnisse von d).

! x bezeichne einen Wolfsburger, $B(x) := x$ hat ein Lieblingsrestaurant, $C(x) := x$ hat eine Lieblingsbar.



2.9. Übungsaufgaben



52. Aufgabe (Aus Klausur Generation 1 Term 2)

Untersuche mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, ob folgende Aussagen logisch gleichwertig sind.

a) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = \overline{A \oplus B}$

b) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) = \overline{A \oplus B}$



53. Aufgabe (Aus Klausur Generation 1 Term 2)

Untersuche mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, ob folgende Aussagen logisch gleichwertig sind.

a) $A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$

b) $\overline{A \wedge B \wedge C} = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$



54. Aufgabe

Vereinfache den Ausdruck unter Beachtung der Umformungsregeln der Aussagenlogik.

a) $(A \wedge B) \wedge (\overline{B})$

b) $A \vee (B \vee C) \rightarrow ((\overline{A}) \wedge (\overline{B})) \wedge (\overline{C})$

c) $\overline{(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee \overline{C}}$

d) $(A \vee C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C})$

